ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème 1

Dans toute la composition, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{L}$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ formé des fonctions lipschitziennes, c'est à dire des fonctions φ telles qu'il existe une constante $K_\varphi \geq 0$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K_\varphi |x-y|$$

Le but du problème est de chercher les fonctions $F \in \mathcal{L}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) - \lambda F(x+a) = f(x) \qquad (\star)$$

où $f \in \mathcal{L}$ est une fonction donnée et λ et a sont deux réels non nuls.

Partie I

1. Soit $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $(\star)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned} F(x) &= \lambda^n F(x+na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+ka) \\ F(x) &= \lambda^{-n} F(x-na) + \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} f(x-ka) \end{aligned}$$

Le résultat est immédiat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   La fonction nulle appartient à $\mathcal{L}$. De plus, si f et g sont lipschitziennes de constantes K_f et K_g, la combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ est lipschitzienne de constante $|\alpha|K_f + |\beta|K_g$ car, par inégalité triangulaire,
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |\alpha f(x) + \beta g(x) - \alpha f(y) - \beta g(y)| \leq |\alpha|K_f|x-y| + |\beta|K_g|x-y|$$

3. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dérivable. Montrer que $f \in \mathcal{L}$ si et seulement si sa dérivée f' est bornée.
   Supposons $f \in \mathcal{L}$. Alors pour tout $x \neq y$
$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq K_f$$
   En faisant tendre $x \to y$, on obtient pour tout $x \in R$: $|f'(x)| \leq K_f$.
   Réciproquement, si $|f'|$ est bornée par K, on a d'après l'inégalité des accroissements finis
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$$

4. Soient f et g deux fonctions bornées de $\mathcal{L}$. Montrer que le produit $f.g$ appartient à $\mathcal{L}$. A l'aide d'un contre-exemple, montrer que ce n'est plus le cas si f et g ne sont pas toutes les deux bornées.
   Soient f et g deux fonctions lipschitziennes bornées. Alors pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\leq |\|f\|_\infty|g(x)-g(y)| + \|g\|_\infty|f(x)-f(y)| \\ &\leq (\|f\|_\infty K_g + \|g\|_\infty K_f)|x-y| \end{aligned}$$
   Considérons $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto \sin(x)$. Comme ces fonctions sont dérivables et lipschitziennes, il suffit d'étudier le caractère borné de $(fg)'$ pour conclure. Or $(fg)'(x) = (x+1)\sin(x)$ n'est pas bornée, ce qui fournit un contre exemple.
5. Soit $f \in \mathcal{L}$. Montrer qu'il existe deux réels positifs A et B tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq A|x| + B$$
   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(x_0)| \leq K_f|x - x_0|$. Et
$$|f(x)| - |f(x_0)| \leq K_f|x| + K_f|x_0|$$
   ce qui donne le résultat avec $A = K_f$ et $B = K_f|x_0| + |f(x_0)|$.
6. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un réel positif M tel que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $0 \leq x - y \leq 1$, on a
$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$$
   Démontrer que $f \in \mathcal{L}$.
   Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Quitte à permuter le rôle de x et y dans le calcul de $|f(x) - f(y)|$, on peut supposer $x - y \geq 0$. En notant $n = \lfloor x-y \rfloor$, la partie entière de$x-y$, il vient : $x = y + n + t$ avec $t \in [0,1[$. Et
$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(y+n)+f(y+n)-f(y+n-1)+\cdots+f(y+1)-f(y)| \leq M(t+1+\cdots+1)$$
   c'est à dire $|f(x) - f(y)| \leq M(x-y)$.

Partie II

1. On suppose dans cette question que $|\lambda| < 1$.

   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x+na)$ est absolument convergente.

   En déduire qu'il existe une et une seule fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant $(\star)$ et que F est donnée par

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x+na)$$

   Pour $x \in R$, on a $|f(x)| \leq A|x| + B$ d'après la partie précédente. D'où

$$|\lambda|^n |f(x+na)| \leq |\lambda|^n (A|x+na| + B)$$

   qui est le terme général d'une série convergence (par comparaison avec la série géométrique de paramètre $|\lambda| < 1$ et sa série dérivée.

   Il suffit alors de constater que F est bien définie par ce qui précède, et qu'elle vérifie $(\star)$. L'unicité est acquise par la condition nécessaire de la question 1 (partie 1) et un calcul immédiat montre que F est lipschitzienne.

   (b) Déterminer F dans les cas suivants :

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = \cos(x), \quad f_3(x) = \sin(x)$$

   Pour f_1 on applique le calcul de la série géométrique pour obtenir $F_1(x) = \dfrac{1}{1-\lambda}$. Pour f_2, on utilise la même technique

$$\begin{aligned}
F_2(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n (\exp(ix+ina) + \exp(-ix-ina)) \\
&= \frac{\exp(ix)}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda\exp(ia))^n + \frac{\exp(-ix)}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda\exp(-ia))^n \\
&= \frac{\exp(ix)}{2}\frac{1}{1-\lambda\exp(ia)} + \frac{\exp(-ix)}{2}\frac{1}{1-\lambda\exp(-ia)} \\
&= \frac{\exp(ix)(1-\lambda\exp(-ia)) + \exp(-ix)(1-\lambda\exp(ia))}{2(1-2\lambda\cos(a)+\lambda^2)}
\end{aligned}$$

   d'où $F_2(x) = \dfrac{\cos(x) - \lambda\cos(x-a)}{1-2\lambda\cos(a)+\lambda^2}$. Finalement on applique la même méthode pour la fonction f_3 pour obtenir $F_3(x) = \dfrac{\sin(x) - \lambda\sin(x-a)}{1-2\lambda\cos(a)+\lambda^2}$

2. On suppose dans cette question que $\lambda > 1$.

   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x-na)$ est absolument convergente. En déduire qu'il existe une et une seule fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant $(\star)$ et que F est donnée par

$$F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x-na)$$

L'argument est identique aux questions précédentes, puisque $|\lambda|^{-1} < 1$.

Partie III

1. On suppose que $\lambda = 1$.

   (a) Montrer que, pour qu'il existe une fonction $\mathcal{F} \in \mathcal{L}$ vérifiant $(\star)$, il faut que f soit bornée.

   Soit F lipschitzienne telle que $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) - F(x+a) = f(x)$. Alors

   $$|f(x)| = |F(x) - F(x+a)| \leq K_F|a|$$

   et il est donc nécessaire que f soit bornée.

   (b) Montrer qu'il existe une fonction $F \in \mathcal{L}$ non nulle vérifiant

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) - F(x+a) = 0$$

   Cette fonction est-elle unique ?

   Toute fonction $x \mapsto A\sin(\dfrac{2\pi x}{a})$ avec $A \in \mathbb{R}$ convient, une telle fonction n'est donc pas unique.

2. On suppose que $\lambda = -1$.

   (a) Montrer qu'il existe une fonction $F \in \mathcal{L}$ non nulle vérifiant

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) + F(x+a) = 0$$

   Cette fonction est-elle unique ?

   Comme précédemment, toute fonction $x \mapsto A\sin(\dfrac{\pi x}{a})$ convient.

   (b) On suppose que $a = 1$ et que $f \in \mathcal{L}$ est décroissante, de limite nulle en $+\infty$ et de dérivée f' croissante.

   i. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(x+n)$ converge.

   A x fixé, la suite $(f(x+n))$ est positive et décroissante vers 0. La série est donc convergente d'après le critère des séries alternées. On peut aussi simplement montrer que les suites des sommes partielles $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

   ii. Montrer qu'il existe une unique fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant $(\star)$ et de limite nulle en $+\infty$.

   On pose comme à la question précédente $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(x+n)$. Alors

   $$F(x+1) + F(x) = f(x)$$

   et par le théorème des séries alternées, $0 \leq F(x) \leq f(x)$ donc F est aussi de limite nulle en $+\infty$.

   Soient x et y deux réels tels que $0 \leq x - y \leq 1$. Et $F(x) - F(y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(f(x+n) - f(y+n))$.

L'inégalité des accroissements finis, la décroissance de f et la croissance de f' donnent, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x+n)-f(y+n) \leq (x-y)f'(x+n) \leq (x-y)f'(y+n+1) \leq f(x+n+1)-f(y+n+1) \leq 0.$$

$F(x) - F(y)$ apparait donc comme la somme d'une série qui satisfait aux hypothèses du théorème des séries alternées. On en déduit que $|F(x) - F(y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq K_f(x - y)$. D'après la partie précédente, on peut en déduire que F appartient à $\mathcal{L}$.
Soit enfin G une fonction de $\mathcal{L}$, tendant vers 0 en $+\infty$ et vérifiant $(\star)$. La fonction $G - F$ est 1-antipériodique et tend vers 0 en $+\infty$, donc est nulle. F est bien la seule solution dans $\mathcal{L}$ qui tend vers 0 en $+\infty$.

2 Problème 2

L'objet du problème est l'étude, dans certains cas, des sous-espaces stables par un endomorphisme d'un espace vectoriel.

Dans tout le problème, on considère un entier naturel n non nul et on note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On note $\mathbf{0}_E$ le vecteur nul de E et $\mathbf{id}_E$ l'endomorphisme identité de E. On dira qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par un endomorphisme f de E (ou que f laisse stable F) si l'inclusion $f(F) \subset F$ est vérifiée.

On observera que le sous-espace vectoriel réduit à $\{\mathbf{0}_E\}$ et E lui-même sont stables par tout endomorphisme de E.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel k, on note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel formé par les éléments de $\mathbb{R}[X]$ qui sont de degré inférieur ou égal à k.

Si f est un endomorphisme de E, on pose

$$f^0 = \mathbf{id}_E, f^1 = f, f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f \circ f, \text{ etc .}$$

Si f est un endomorphisme de E et si

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

avec P élément de $\mathbb{R}_n[X]$, on rappelle qu'on note $P(f)$ l'endomorphisme de E égal à

$$P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k.$$

Partie I

Soit f un endomorphisme de E.

1. Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que le sous-espace vectoriel $\ker P(f)$ est stable par f.
   Soit $x \in \ker(P(f))$. Comme $P(f)$ et f commutent, on a $P(f)(f(x)) = f(P(f)(x)) = f(0) = 0$. Donc $f(x) \in \ker(f)$.

2. (a) Montrer que les droites de E stables par f sont exactement celles qui sont engendrées par un vecteur propre de l'endomorphisme f.

Soit D une droite stable par f, c'est à dire $D = \text{Vect}(u)$ avec $u \neq 0$. Comme D est stable, $f(u) \in D$. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = \lambda u$, et u est un vecteur propre de f.

Réciproquement, si $D = \text{Vect}(u)$ avec u un vecteur propre de f associé à une valeur propre λ, alors $f(\mu u) = \mu\lambda u \in D$ pour tout $\mu \in \mathbb{R}$. Donc D est stable par f.

(b) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer (en en donnant une base) les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par g.

Les droites stables sont engendrées par des vecteurs propres de g. Le spectre de g est $\{1, 2\}$. On résout $g(x) = x$ ce qui donne $\text{Vect}(e_1)$ et $g(x) = 2x$ ce qui donne $\text{Vect}(e_3)$.

(c) Soit p un entier naturel non nul inférieur ou égal à n.

i. Si $F_1, \dots, F_p$ sont p sous-espaces vectoriels de E stables par f, montrer qu'alors la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est un sous-espace vectoriel stable par f.

Soit $(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$. On a, par linéarité de f :

$$f(x_1 + \cdots + x_p) = f(x_1) + \cdots + f(x_p) \in F_1 + \cdots + F_p$$

car les F_i sont stables par f.

ii. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont p valeurs propres de f et si $n_1, \dots, n_p$ sont p entiers naturels, montrer qu'alors la somme

$$\sum_{k=1}^{p} \ker(f - \lambda_k \mathbf{id}_E)^{n_k}$$

est stable par f.

Comme $\ker(P(f))$ est stable par f, les $\ker(f - \lambda_k \mathbf{id}_E)^{n_k}$ sont stables par f. Et d'après la question précédente, leur somme est stable par f.

3. (a) Soit λ un réel. Vérifier que les sous-espaces vectoriels de E stables par un endomorphisme f sont exactement ceux qui sont stables par l'endomorphisme $f - \lambda \mathbf{id}_E$.

Soit F un sous-espace stable par f. Pour $x \in F$, $f(x) \in F$ et $\lambda x \in F$, donc $(f - \lambda \mathbf{id})(x) \in F$.

Réciproquement, si F est stable par $f - \lambda \mathbf{id}$, on a $f(x) - \lambda x \in F$ et $\lambda x \in F$ donc $f(x) \in F$.

(b) Quel lien y-a-t-il entre les sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme f et ceux qui sont stables par l'endomorphisme f^2 ?

Soit F stable par f. Alors $f(F) \subset F$, $f^2(F) \subset F$. F est donc stable par f^2. La réciproque est fausse (prendre une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et une droite dans $\mathbb{R}^2$, stable par f^2 mais pas par f.

(c) Quel lien y-a-t-il entre les sous-espaces vectoriels stables par un automorphisme f et ceux qui sont stables par l'endomorphisme f^{-1} ?

Soit F stable par f^{-1}. On a $f^{-1}(F) \subset F$ et $\dim(f^{-1}(F)) = \dim(F)$, car f^{-1} est un automorphisme. Donc $f^{-1}(F) = F$. Soit $x \in F$, il existe $y \in F$ tel que $x = f^{-1}(y)$. Et $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y \in F$. Donc F est stable par f. Un raisonnement analogue montre que les sous espaces stables par f^{-1} sont exactement ceux qui sont stables par f.

(d) Que dire d'un endomorphisme de E laissant stable tout sous-espace vectoriel de E ?

Un tel endomorphisme f est une homothétie : en effet, f laisse stable toutes les droites. D'après la première question, elles sont donc dirigées par des vecteurs propres. De plus, si u et v sont deux vecteurs non colinéaires (formant une famille libre),

$$f(u+v) = \lambda_{u+v}(u+v) = f(u) + f(v) = \lambda_u u + \lambda_v v$$

Et $\lambda_u = \lambda_{u+v} = \lambda_v$ donc f admet une unique valeur propre, dont tout vecteur non nul est vecteur propre. C'est une homothétie.

(e) Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ne laissant stable que le sous-espace vectoriel réduit au vecteur nul et l'espace $\mathbb{R}^2$.

Une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ convient.

4. (a) On rappelle qu'une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ et qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$. Montrer que les hyperplans de E sont exactement les noyaux de formes linéaires non nulles sur E.

Soit φ une forme linéaire non nulle. Son image est $\mathbb{R}$, de dimension 1. Donc d'après le théorème du rang, son noyau est de dimension $n-1$, c'est donc un hyperplan. Réciproquement, si H est un hyperplan, il existe un supplémentaire D de H dans E, et $H \oplus D = E$. Donc D est de dimension 1, c'est une droite vectorielle, de vecteur directeur $u \neq 0$. Dans ce cas, on définit une forme linéaire φ par $\varphi(u) = 1$ et $\varphi(h) = 0$ pour $h \in H$. Et $\ker(\varphi) = H$.

(b) Soit φ une forme linéaire non nulle sur E et $H = \ker \varphi$.

i. Montrer que l'hyperplan H est stable par f si et seulement si il existe un élément $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant l'égalité : $\varphi \circ f = \lambda \varphi$.

Supposons que H est stable par f. On note $D = \mathrm{Vect}(u)$ une droite supplémentaire de H dans E.

Soit $x \in \mathbb{E}$, $x = h + \alpha u$. Alors $f(x) = f(h) + \alpha f(u)$. En écrivant λu la projection de $f(u)$ sur D, il vient

$$\varphi(f(x)) = 0 + \alpha\lambda\varphi(u) = \lambda\varphi(x)$$

Réciproquement, si $\varphi \circ f = \lambda\varphi$, alors $\varphi(f(h)) = 0$ pour $h \in H$, c'est à dire $f(h) \in H$. D'où l'équivalence.

ii. On note A la matrice de f relativement à la base canonique de E et L la matrice (ligne) de φ relativement aux bases canoniques de E et $\mathbb{R}$.

Montrer que l'hyperplan H est stable par f si et seulement si il existe un réel λ vérifiant l'égalité :

$${}^t A {}^t L = \lambda {}^t L.$$

C'est la formulation matricielle de la question précédente.

iii. Déterminer (en en donnant une base) les plans de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme g défini à la question 2).

Soit H un plan stable de $\mathbb{R}^3$: c'est un hyperplan, donc le noyau d'une forme linéaire φ. Avec les notations de la question précédente, il existe un réel λ vérifiant ${}^tB{}^tL = \lambda{}^tL$. Donc ${}^tL$ est un vecteur propre associé à ${}^tB$.

— Si $\lambda = 1$, on trouve $H = \text{Vect}(e_1, e_3)$.

— Si $\lambda = 2$, on trouve $H = \text{Vect}(e_1, e_2)$.

et on vérifie que les deux plans trouvés conviennent.

Partie II

Dans cette partie, on considère un endomorphisme f de E diagonalisable. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes et $E_1, \ldots, E_p$ les sous- espaces propres correspondants.

1. Que dire des sous-espaces vectoriels de E stables par f si $p = 1$?

   Comme f est diagonalisable et possède une unique valeur propre, c'est une homothétie. Donc tous les sous espaces de E sont stables par f.

2. On suppose l'entier p au moins égal à 2. On considère un sous-espace vectoriel F de E stable par f et un élément x de F.

   (a) Justifier l'existence d'un unique élément $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de $\prod_{k=1}^{p} E_k$ vérifiant l'égalité :

$$x = \sum_{k=1}^{p} x_k$$

   Comme les E_i sont des sous espaces propres associés à des valeurs propres distinctes, ils sont en somme directe et $\oplus_{i=1}^{p} E_i = E$ car f est diagonalisable.

   Pour un $x \in F$, en particulier $x \in E$, l'existence et l'unicité des x_i provient de la décomposition en somme directe de E.

   (b) Montrer que le vecteur $\sum_{k_2}^{p} (\lambda_k - \lambda_1) x_k$ appartient à F.

   Comme $f(x) \in F$, on a

$$f(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k \in F$$

   d'où $f(x) - \lambda_1 x = \sum_{k=2}^{p} (\lambda_k - \lambda_1) x_k \in F$.

   (c) Montrer que les vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ sont tous dans F.

   Avec le résultat de la question précédente, on note $y = \sum_{k=2}^{p} (\lambda_k - \lambda_1) x_k \in F$.

   Donc $f(y) = \sum_{k=2}^{p} \lambda_k (\lambda_k - \lambda_1) x_k$ et $f(y) - \lambda_2 y = \sum_{k=3}^{p} (\lambda_k - \lambda_3)(\lambda_k - \lambda_1) x_k \in F$. Par une récurrence immédiate, on obtient $(\lambda_p - \lambda_{p-1}) \ldots (\lambda_p - \lambda_1) x_p \in F$. Les valeurs propres étant distinctes, on a $x_p \in F$.

De même, par une récurrence descendante, on en déduit que les x_k appartiennent à F.

3. Déduire de la question précédente que les sous-espaces vectoriels de E stables par f sont exactement les sous-espaces vectoriels de la forme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ où, pour tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq p$, F_k est un sous-espace vectoriel de E_k.

   Les sous-espaces vectoriels de la forme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ sont stables par f. Réciproquement, si F est un sous-espace vectoriel stable par f, pour $x \in F$, x s'écrit de façon unique $\sum_{k=1}^{p} x_k$ avec $x_k \in E_k$ pour tout k. On pose $F_k = F \cap E_k$, pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$. Alors, F_k est bien un sous-espace vectoriel de E_k, et par double inclusion, $F = \sum_{k=1}^{p} F_k$.

4. Soit F un sous-espace vectoriel stable par f. Montrer que l'endomorphisme induit par f sur F est un endomorphisme diagonalisable de F.

   On note $\tilde{f} : x \mapsto f(x)$ l'endomorphisme de F induit par f. Alors, avec les notations de la questions précédente, les F_k sont les sous-espaces propres de $\tilde{f}$, et leur somme directe vaut F d'après ce qui précède. Donc $\tilde{f}$ est diagonalisable.

5. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les valeurs propres de f pour que E possède un nombre fini de sous-espaces vectoriels stables par f. Quel est alors ce nombre ?

   Une CNS pour que E possède un nombre fini de sous espaces stables est $p = n$ (c'est à dire f possède n valeurs propres distinctes, associées à des espaces propres de dimension 1).

   En effet : si f possède n valeurs propres distinctes, comme les sous espaces stables sont formés de sommes de sous espaces des espaces propres, elle possède donc 2^n sous-espaces stables. (Les seuls sous-espaces vectoriels d'un espace de dimension 1 sont l'espace lui-même et $\{0\}$.) Et, par contraposée, si $p < n$, comme f est diagonalisable, elle admet au moins un sous-espace propre de dimension ≥ 2, qui admet une infinité de sous-espaces vectoriels. Donc f admet une infinité de sous-espaces stables.

Partie III

1. On note $\mathbf{0}$ l'endomorphisme nul de E et on considère un endomorphisme f de E nilpotent d'ordre n, c'est à dire vérifiant les conditions :

$$f^n = \mathbf{0} \text{ et } f^{n-1} \neq \mathbf{0}.$$

   (a) Etablir qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice A de f est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A est donc la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$) vaut 1 si $j = i+1$ et 0 sinon.

Comme $f^{n-1} \neq 0$, il existe un $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. On considère la famille $(f^{n-1}(x), \ldots, f(x), x)$.

C'est une famille libre (car si $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x) = 0$, en composant par f^{n-1} , f^{n-2} ..., on trouve que les α_i sont tous nuls) qui possède n vecteurs, c'est donc une base. L'écriture de la matrice de f dans cette base s'en suit.

(b) Déterminer (en en donnant une base) les sous-espaces vectoriels de E stables par f.

Soit F un sous-espace de E stable par f non réduit à $\{0_E\}$. Avec les notations des questions précédentes, on pose $F_k = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$. Donc les F_k sont stables par f. Montrons que F est l'un des F_k. On note i l'indice minimal tel que $F \subset F_i$. Cet indice existe car $F \subset F_n$.

— Si $i = 1$, alors $F = F_1$ et c'est terminé.

— Sinon $i > 1$ et il existe $u \in F \setminus F_{i-1}$, d'où l'écriture $u = \sum_{k=1}^{i} u_k e_k$ avec $u_i \neq 0$. Alors $G := \mathrm{Vect}\{f^k(u) : k \in \mathbb{N}\}$ est un sous-espace stable qui contient $e_1 = \dfrac{f^{i-1}(u)}{u_i}$, donc également $e_2 = \dfrac{f^{i-2}(u) - u_{i-1}e_1}{u_i}$ et ainsi de suite jusqu'à $e_{i-1} = \dfrac{f(u) - \sum_{j=1}^{i-2} u_{j+1}e_j}{u_i}$. Donc F_{i-1} est un sous-espace vectoriel strict de G (car $u \in G \setminus F_{i-1}$ donc $\dim G > i-1$), lui-même étant un sous-espace vectoriel de F donc $\dim F \geq i = \dim F_i$ ce qui prouve que $F = F_i$.

2. Dans cette question on considère un endomorphisme f de E nilpotent d'ordre 2, c'est à dire un endomorphisme non nul de E tel que $f \circ f = \mathbf{0}$.

(a) On considère un sous-espace vectoriel F_2 de E vérifiant $F_2 \cap \ker f = \{\mathbf{0}_E\}$. Justifier l'inclusion : $f(F_2) \subset \ker f$.

Soit $y \in f(F_2)$. Il existe $x \in F_2$ tel que $f(x) = y$ et $f(f(x)) = f(y) = 0$. Donc $y \in \ker f$.

(b) On considère de plus un sous-espace vectoriel F_1 de $\ker f$ contenant $f(F_2)$. Montrer que la somme $F_1 + F_2$ est directe et que c'est un sous-espace vectoriel de E stable par f.

On a $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ donc la somme est directe. Et si $x = x_1 + x_2 \in F_1 + F_2$, alors

$$f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f(x_2) \in f(F_2) \subset F_1$$

Donc $F_1 + F_2$ est stable par f.

(c) Soient A, B, C trois sous-espaces vectoriels de E, montrer l'inclusion suivante :

$$(A \cap C) + (B \cap C) \subset (A + B) \cap C.$$

A-t-on nécessairement l'égalité ?

L'inclusion est banale. On n'a pas nécessairement égalité : prendre dans $\mathbb{R}^2$ $A = \mathrm{Vect}(e_1)$, $B = \mathrm{Vect}(e_2)$ et $C = \mathrm{Vect}(e_2 + e_2)$.

(d) Déterminer l'intersection $(F_1 + F_2) \cap \ker f$.

$(F_1 + F_2) \cap \ker f = F_1$

(e) Réciproquement on considère un sous-espace vectoriel F de E stable par f. On pose $F_1 = F \cap \ker f$ et on considère un sous-espace vectoriel F_2 supplémentaire de F_1 dans F. Vérifier l'inclusion $f(F) \subset \ker f$ et prouver que l'intersection $F_2 \cap \ker f$ est réduite au vecteur nul.

$f(F) \subset f(E) \subset \ker(f)$. Et $F_2 \subset F$ donc $F_2 \cap \ker f \subset F \cap \ker f = F_1$. Ainsi $F_2 \cap \ker f \subset F_2$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

Pour n entier supérieur ou égal à 1, on considère la fonction numérique f_n définie par :

$$f_n(x) = x^n \sqrt{1+x^2}$$

1. Etudier les variations de f_n et tracer son graphe selon les valeurs de n.

La fonction f_n est définie sur R.

Si n est pair, la fonction f_n est paire et son graphe est symétrique par rapport à l'axe Oy.

Si n est impair, la fonction f_n est impaire et son graphe est symétrique par rapport à l'origine.

Il suffit d'étudier la fonction sur l'ensemble des nombres réels positifs.

La dérivée est : $f_n'(x) = \dfrac{n\,x^{n-1}\,(n+(n+1)x^2)}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$, la fonction est donc strictement croissante de R^+ sur R^+. Son graphe admet une branche parabolique dans la direction Oy et une tangente horizontale à l'origine (pour n>1). Si n = 1, la pente à l'origine est 1.

2. On pose $J_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ (avec $n \geq 0$)

- Calculer J_1 et J_2

On a : $J_1 = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$

On a : $J_2 = \int_0^1 x.x\sqrt{1+x^2}\,dx = \left[\frac{x}{3}(1+x^2)^{3/2}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 (1+x^2)\sqrt{1+x^2}\,dx$ (intégration par parties). D'où $J_2 = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} - \dfrac{1}{3}(J_0 + J_2)$, soit $J_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{4}J_0$.

Il reste à calculer J_0.

$J_0 = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx$, on pose $x = sh\, t$.

On rappelle que $ch^2 t - sh^2 t = 1$, $(sh\, t)' = ch\, t$ et $Argsh\, t = Ln\,(x + \sqrt{1+x^2})$.

On obtient $J_0 = \int_0^{Argsh\, 1} ch^2 t\, dt = \frac{1}{4}\int_0^{Ln\,(1+\sqrt{2})} (e^{2t} + e^{-2t} + 2) dt = \frac{1}{4}\left[\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} + 2t\right]_0^{Ln\,(1+\sqrt{2})}$ et

$$J_0 = \frac{1}{4}\left(\frac{(1+\sqrt{2})^2}{2} - \frac{1}{2(1+\sqrt{2})^2} + 2\, Ln\,(1+\sqrt{2})\right)$$

3. Etudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\geq 1}$

On a : $J_{n+1} - J_n = \int_0^1 x^n (x-1)\sqrt{1+x^2}\, dx < 0$. La suite est donc décroissante et minorée par zéro, donc elle est convergente.

\- Déterminer la limite de la suite $(J_n)_{n\geq 1}$ si elle est convergente.

Soit $0 < \varepsilon < 1$ quelconque fixé, on a : $J_n = \int_0^{1-\varepsilon} f_n(x)\, dx + \int_{1-\varepsilon}^1 f_n(x)\, dx$ et

$0 < \int_0^{1-\varepsilon} f_n(x)\, dx \leq \sqrt{2}\,(1-\varepsilon)^{n+1}$ qui tend vers zéro quand *n* tend vers l'infini.

$0 < \int_{1-\varepsilon}^1 f_n(x)\, dx \leq \sqrt{2}\,\varepsilon$. Par conséquent la suite tend vers zéro.

Exercice n° 2

On considère dans R^3 , le plan P_a d'équation : $z = x + ay$, où a est un nombre réel quelconque.

1. Déterminer, dans la base canonique de R^3, la matrice M_a de la projection orthogonale sur P_a.

La matrice M_a est diagonalisable et semblable à la matrice $\Delta_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans une base formée d'une base de P_a, à savoir $e_1 = (1,0,1)$ et $e_2 = (0,1,a)$, et de son orthogonal, à savoir $e_3 = (1,a,-1)$. La matrice de passage s'écrit $Q_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$ et son inverse

$$Q_a^{-1} = \frac{-1}{2+a^2}\begin{pmatrix} -1-a^2 & a & -1 \\ a & -2 & -a \\ -1 & -a & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient : $M_a = Q_a \Delta_a Q_a^{-1} = \frac{1}{2+a^2}\begin{pmatrix} 1+a^2 & -a & 1 \\ -a & 2 & a \\ 1 & a & 1+a^2 \end{pmatrix}$

2. Calculer M_a^n pour tout entier n strictement positif.

Comme toute matrice de projection : $M_a^n = M_a$

3. Déterminer, dans la base canonique de R^3, la matrice S_a de la symétrie orthogonale par rapport à P_a.

On procède comme pour la première question. La matrice semblable à S_a est $\Delta_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (dans la même base) et $S_a = Q_a \Delta_S Q_a^{-1} = \frac{1}{2+a^2}\begin{pmatrix} a^2 & -2a & 2 \\ -2a & 2-a^2 & 2a \\ 2 & 2a & a^2 \end{pmatrix}$

4. Calculer le produit $M_a S_a$.

Il est évident géométriquement que $M_a S_a = M_a$

Exercice n° 3

Soient A et B deux matrices carrées de même ordre à coefficients réels.

1. Montrer que A et B sont inversibles si et seulement si AB est inversible et dans ce cas, exprimer $(AB)^{-1}$ en fonction de A^{-1} et B^{-1}

a) Si A et B sont inversibles, on a : $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ et $B^{-1}B = BB^{-1} = I$. Puis $A\,B\,B^{-1}A^{-1} = A(B\,B^{-1})\,A^{-1} = A\,I\,A^{-1} = A\,A^{-1} = I$, donc le produit est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$

b) Réciproquement, si AB est inversible, alors il existe $\det(AB) = \det A \times \det B \neq 0$ et les deux déterminants sont non nuls, ce qui implique l'inversibilité de ces deux matrices.

2. Montrer que A est inversible si et seulement si $A^p\ (p \in N^*)$ est inversible et dans ce cas, exprimer $(A^p)^{-1}$ en fonction de A^{-1}.

a) Supposons que A soit inversible, alors $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

On a : $A^p\,(A^{-1})^p = A^{p-1}(A\,A^{-1})(A^{p-1})^{-1} = A^{p-1}\,I\,(A^{p-1})^{-1}$ et de proche en proche $AA^{-1} = I$, donc $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$ (l'inverse d'une matrice étant unique).

b) Réciproquement, si A^p est inversible, alors $\det(A^p) = p\det A \neq 0$ et la matrice est inversible.

3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $\alpha \in R$

- Calculer A^n pour tout entier naturel n.

En utilisant les formules de trigonométrie, on obtient : $A^2=\begin{pmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0\\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et par récurrence on obtient : $A^n=\begin{pmatrix}\cos n\alpha & \sin n\alpha & 0\\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

- Calculer (si elle existe) l'inverse de *A*.

On obtient $A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et on peut vérifier que $A^{-1}A=AA^{-1}=I$

- Vérifier que $(A^n)^{-1}$ existe.

Si $(A^n)^{-1}$ existe, alors $(A^n)(A^n)^{-1}=I$ et on montre par récurrence que : $(A^n)^{-1}=\begin{pmatrix}\cos n\alpha & -\sin n\alpha & 0\\ \sin n\alpha & \cos n\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Exercice n° 4

On définit une suite d'entiers naturels $q_k\ (k\in N)$ par $q_{k+1}=2q_k+1$ et $q_0=0$

1. Exprimer q_k en fonction de *k*.

On a $q_1=1; q_2=3; q_3=7$ et on vérifie par récurrence que $q_k=2^k-1$

2. On note $Q=\{q_k\ /\ k\in N\}$ et on définit la suite (a_n) par :

$a_0=1; a_{q_k}=\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{k} q_i}; a_n=0$ si $n\notin Q$ .Quelle est la nature des séries $\sum a_n$ et $\sum n a_n$?

On a $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{a_{q_{k+1}}}{a_{q_k}}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{2^{k+1}-1}=0$ et d'après le critère de d'Alembert, la série $\sum a_{q_k}$ converge et donc $\sum a_n$ converge. Pour $k\geq 1$, $q_{k+1}\,a_{k+1}=a_k$ et donc la série $\sum n a_n$ converge.

3. Pour *x*>1, calculer $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{q_k}x^{q_k}$

On a $\dfrac{a_{q_{k+1}}x^{q_{k+1}}}{a_{q_k}x^{q_k}}=\dfrac{1}{2^{k+1}-1}x^{2^{k+1}-2^k}\approx\dfrac{1}{2}\times\dfrac{x^{2^k}}{2^k}\to\infty$, donc $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{q_k}x^{q_k}=+\infty$

4. On considère la suite (p_n) définie par : $p_0 = p \in \left]0,1\right[;\ p_{n+1} = \sqrt{p_n}$. Etudier la convergence de la suite (p_n).

La suite est positive et majorée par 1 et on a : $p_{n+1} - p_n = \sqrt{p_n}(\sqrt{p_n} - 1) > 0$, elle est donc croissante et par conséquent convergente vers une limite l solution de l'équation : $l = \sqrt{l}$, d'où l=1

5. Etudier la convergence de la suite (v_n) de terme général : $v_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1 + p_{k+1} - p_k\right)$

On a $\left(1 + p_{k+1} - p_k\right) \geq 1$, donc $Ln\left(1 + p_{k+1} - p_k\right) \geq 0$. La suite $\left(Ln\, v_n\right)$ est croissante.

Par ailleurs, $Ln\left(1 + p_{k+1} - p_k\right) \leq p_{k+1} - p_k$ et

$Ln\prod_{0}^{n}\left(1 + p_{k+1} - p_k\right) = \sum_{0}^{n} Ln\left(1 + p_{k+1} - p_k\right) \leq \sum_{0}^{n}(p_{k+1} - p_k) = p_{n+1} - p_0 \leq 1$. La suite $\left(Ln\, v_n\right)$ étant croissante et majorée, elle converge et il en est de même pour la suite (v_n).

Exercice n° 5

Soit E_n l'espace vectoriel des polynômes d'une variable réelle à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n. On considère Q l'application numérique définie sur E_n par :

$$Q(p) = \int_{-1}^{1} p^2(x)(1 + x^2)\,dx$$

1. Montrer que Q est une forme quadratique, dont la forme bilinéaire associée définit sur E_n un produit scalaire.

$\forall\, p, p_1 \in E_n, B(p, p_1) = \int_{-1}^{1} p^2(x)\, p_1^2(x)(1 + x^2)\,dx$ et B est bilinéaire symétrique car l'intégrale est linéaire. De plus :
$\forall\, p \in E_n, B(p,p) = \int_{-1}^{1} p^4(x)\ (1 + x^2)\,dx \geq 0$ et $B(p,p) = 0 \iff p(x) = 0\ \ \forall x \in \left[-1,1\right]$
On a donc un produit scalaire.

2. Montrer qu'il existe une base orthogonale p_i $(i = 0,1,...n)$ de E_n telle que le terme de plus haut degré de p_i soit X^i.
On a $\dim E_n = n + 1$.
(p_i) est une base orthogonale si et seulement si $\forall\, i \neq j, B(p_i, p_j) = 0$.

On pose $p_0(x)=1, p_1(x)=x$ (on vérifie aisément qu'ils sont orthogonaux pour ce produit scalaire, en effet : $B(p_0,p_1)=\int_{-1}^{1} x\,(1+x^2)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1}=0$

On cherche p_2 de la forme $p_2(x)=x^2+\alpha x+\beta$ avec

$B(p_0,p_2)=0\ (\Rightarrow \beta=-2/5)$ et $B(p_1,p_2)=0\ (\Rightarrow \alpha=0)$, on obtient $p_2(x)=x^2-\frac{2}{5}$.

On suppose $p_0,...,p_{i-1}$ déterminés et on cherche p_i de la forme $p_i(x)=x^i+\sum_{k=0}^{i-1}\alpha_k\, p_k$ et vérifiant : $B(p_i,p_k)=\int_{-1}^{1}(x^i\ p_k(x)+\alpha_k\ p_k^2(x))(1+x^2)\,dx=0,\ \forall k=0,...,i-1$

Ceci donne une équation affine qui permet de déterminer les α_k de façon unique et donc p_i

3. Pour $i\in\{0,1,...n-2\}$, on note F_i le sous espace de E_n engendré par les polynômes de degré strictement inférieur à *i*. Déterminer une base du sous espace $F_i^{\perp}$ orthogonal à F_i

F_i admet comme base les polynômes $\{p_0,...,p_{i-1}\}$ et d'après la question précédente $\{p_i,...,p_n\}$ constituent une base de $F_i^{\perp}$

4. Montrer que $p_{i+2}-X\,p_{i+1}$ appartient à $F_i^{\perp}$. En déduire une relation entre p_{i+2}, p_{i+1}, p_i

$p_{i+2}-X\,p_{i+1}\in F_i^{\perp} \Leftrightarrow p_{i+2}-X\,p_{i+1}\perp p_k\ \forall k=0,...,i-1$. Il suffit de vérifier que $X\,p_{i+1}\perp p_k$, car $p_{i+2}\in F_i^{\perp}$. On a : $B(X\,p_{i+1},X^k)=\int_{-1}^{1}x^{k+1}\ p_{i+1}(x)(1+x^2)\,dx\ \ \forall k=0,...,i-1$ ou encore $B(X\,p_{i+1},X^k)=\int_{-1}^{1}x^{k'}\ p_{i+1}(x)(1+x^2)\,dx=0,\ \forall k'=1,...,i$, ce qui implique

$p_{i+2}-X\,p_{i+1}=\lambda_0\,p_i+...+\lambda_{n-i}\,p_n$. Comme $p_{i+3},...,p_n$ sont orthogonaux à p_{i+2} et $X\,p_i$, il s'ensuit que : $\lambda_3=\lambda_4=...=\lambda_{n-i}=0$, donc $p_{i+2}-X\,p_{i+1}=\lambda_0\,p_i+\lambda_1\,p_{i+1}+\lambda_2\,p_{i+2}$ et par identification, on obtient $\lambda_2=0$ et avec la parité $\lambda_1=0$;

En conclusion $p_{i+2}=X\,p_{i+1}+\lambda_0\,p_i$

5. On suppose *n*=2.

- Ecrire la matrice *M* de la forme bilinéaire symétrique associée à *Q* dans E_2

On a :

$$B(1,1)=\int_{-1}^{1}(1+x^2)\,dx=8/3$$

$$B(x,x)=B(1,x^2)=\int_{-1}^{1}(x^4+x^2)\,dx=16/15$$

$B(x^2,x^2)=\int_{-1}^{1}(x^4+x^6)\,dx=24/35$, par conséquent $M=\frac{8}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2/5\\ 0 & 2/5 & 0\\ 2/5 & 0 & 9/35\end{pmatrix}$

- La matrice *M* est-elle inversible ?

M étant une matrice symétrique définie positive, donc son déterminant est non nul et elle est inversible

- La matrice M est-elle diagonalisable ? Que peut-on dire de ses éventuelles valeurs propres ?

Comme elle est symétrique, elle est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont strictement positives (matrice définie positive).

6. Répondre à la question précédente dans le cas où n=3.

Il suffit simplement de compléter les calculs :

$B(1,x^3) = B(x^2,x^3 = 0;\ B(x,x^3) = B(x^2,x^2) = 24/35;\ B(x^3,x^3) = 32/63$, on en déduit la matrice N associée qui est inversible et diagonalisable :

$$N = \begin{pmatrix} 8/3 & 0 & 16/15 & 0 \\ 0 & 16/15 & 0 & 24/35 \\ 16/15 & 0 & 24/35 & 0 \\ 0 & 24/35 & 0 & 32/63 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 6

1. Soit la fonction numérique g définie par : $g(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}$. Etudier les variations de g et tracer son graphe (on précisera ses extrema, ainsi que sa convexité). La fonction étant paire, il suffit de l'étudier sur l'ensemble des réels positifs et son graphe sera symétrique par rapport à l'axe Oy. On a :

$g^{'}(x) = (-x^3 + 3x)e^{-x^2/2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \sqrt{3}$ et $g^{''}(x) = (x^4 - 6x^2 + 3)e^{-x^2/2}$

x	0 $\qquad$ $\sqrt{3}$	$+\infty$
$g^{'}(x)$	+	-
$g(x)$	-1 $\nearrow$ $2e^{-3/2}$	$\searrow$ 0

La fonction admet donc 3 extrema en $x = 0,\ x = \pm\sqrt{3}$

$g^{''}(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 3 = 0$ (équation bicarrée). On a 4 points d'inflexion dont les abscisses sont $x = \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{6}}$

2. Résoudre l'équation différentielle : $y^{''} + 2xy^{'} + (x^2 + 1)y = 0$. On cherchera des solutions de la forme $y(x) = u(x)e^{-x^2/2}$

On a $y^{'} = e^{-x^2/2}(u^{'} - xu); y^{''} = e^{-x^2/2}(u^{''} - 2xu^{'} + (x^2 - 1)u)$ et en remplaçant dans l'équation différentielle proposée, on obtient : $u^{''}e^{-x^2/2} = 0$, soit $u^{''} = 0$ et $u(x) = ax + b$. Par conséquent $y(x) = (ax + b)e^{-x^2/2}$

3. On considère les fonctions numériques $f_{a,b}$ définies par $f_{a,b}(x)=(ax+b)e^{-x^2/2}$, où a et b sont deux nombres réels. On note $C_{a,b}$ leurs courbes représentatives. Montrer que pour a fixé non nul, les fonctions $f_{a,b}$ admettent des extrema et que les points correspondants à ces extrema sur $C_{a,b}$ appartiennent à un ensemble M_a. Représenter M_1. Comment M_a se déduit de M_1 ?

On a $f'_{a,b}(x)=(-ax^2-bx+a)e^{-x^2/2}$ et cette dérivée est nulle pour $ax^2+bx-a=0$ et comme $\Delta=b^2+4a^2>0$, on a deux racines réelles distinctes de signe contraire qui donnent des extrema à la fonction $f_{a,b}$ puisque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_{a,b}(x)=0$ (le résultat est le même pour a>0 ou a<0). Les points correspondants à ces extrema vérifient : $\begin{cases} y=(ax+b)e^{-x^2/2} \\ (-ax^2-bx+a)e^{-x^2/2}=0 \end{cases}$

En multipliant la première équation par x et en additionnant, on obtient : $y=a\dfrac{e^{-x^2/2}}{x}$

Pour M_1, on a : $y=\dfrac{e^{-x^2/2}}{x}$ et $y'=-\dfrac{(x^2+1)e^{-x^2/2}}{x^2}<0$. La fonction est impaire, donc son graphe est symétrique par rapport à l'origine, la fonction est strictement décroissante de R^+ sur R^+ et les axes sont des asymptotes à la courbe. M_a se déduit de M_1 par homothétie.

4. Montrer que pour a fixé non nul, les courbes $C_{a,b}$ admettent trois points d'inflexion dont l'un est d'abscisse comprise entre -1 et 1.

La dérivée seconde de $f_{a,b}$ est $f''_{a,b}(x)=(ax^3+bx^2-3ax-b)e^{-x^2/2}$. Etudions le signe du polynôme $P(x)=ax^3+bx^2-3ax-b$. On a : $P(-1)=2a;P(1)=-2a$. Ces deux valeurs sont de signe opposé. Le résultat sera le même pour a>0 ou a<0. Pour a>0, le tableau des variations est le suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	+	$\searrow$	-	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a bien 3 points d'inflexion.

5. Ces points d'inflexion appartiennent pour a fixé et b variable à un ensemble noté I_a Représenter I_1. Comment I_a se déduit de I_1 ?

Ces points d'inflexion vérifient : $\begin{cases} y=(ax+b)e^{-x^2/2} \\ (ax^3+bx^2-3ax-b)e^{-x^2/2}=0 \end{cases}$

On multiplie la première équation par (x^2-1) et on soustrait les deux lignes pour obtenir : $(x^2-1)\,y = 2a\,x\,e^{-x^2/2}$, à savoir $y = \dfrac{2a\,x\,e^{-x^2/2}}{(x^2-1)}$ $(x \neq \pm 1)$.

Pour a=1, $y = \dfrac{2\,x\,e^{-x^2/2}}{(x^2-1)}$ $(x \neq \pm 1)$ et $y' = \dfrac{-2\,(x^4+1)\,e^{-x^2/2}}{(x^2-1)^2} < 0$. La fonction est donc strictement décroissante de $]-\infty,-1[$ sur R^-, de $]-1,1[$ sur R et de $]1,+\infty[$ sur R^+. Les axes x=-1 et x=1 sont des asymptotes verticales et l'axe Ox une asymptote horizontale.

I_a se déduit de I_1 par homothétie.